

小学校算数に接続した正負の数の加減

代数和計算に準拠した 計算順序を見直す提案

福尾忠彦

奈良市 退職教員

要 約

中1ギャップという言い方を耳にすることがある。入学早々の正負の数の加減はその最たるもののひとつであろう。理由の主なもの、小学校算数修了者が会得している計算方法を活かさない不自然な計算方法の押しつけである。いろいろな場合の加減計算を不自然な型分けに分類せず、与式を代数和形式に還元して、大人一般も含めて行われている常識的な黒字・赤字計算の手法で、全く同一の1通りの手順で全ての加減の型を処理する。

正負の数の加減の標準的な配当時数は8時間であるが、本方法での必要時数は3～4時間である。30年間の実績に新提案を追加しての実践報告です。

この小論の構成の中心は、

- 1、小学校算数に接続する（活かす）方法で 計算方法を提示する。
- 2、導入した負数をも含めた正負の数の加減を全て同一の計算手順で処理する の2つである。

0、はじめに

数学学習を含む物事の理解において決定的な要素は 人間が生まれ持っている知能である。筆者のように、特に評価されるようなものではなく 普通の授業を淡々としていたにもかかわらず、多くの生徒は学習目標を達成して3年間を通過してくれました。様々な能力や個性の生徒が混在する公立中学校において どなたが授業をされても、大多数の生徒は学習目標を通過して行く。逆に、教科教育専門の大学のベテラン先生が授業をされても、100%の生徒を目標達成させることは出来ないであろう。授業目標の100%達成は原理的に無理であっても、限りなくそれに近い目標達成を目指すのが教材研究や授業法研究をする理由でありましょうか。

全ての教科書ならびに参考書での正負の数の加減の説明は、(2つの項の加法・減法)(2項の同符号・異符号)(異符号の場合 各数の絶対値の大小)で式の型を分類して型ごとの例題説明が6～8問提示される。2項での説明の後に、3項以上の式の説明に移って行く。

本稿では、負数の加減の意味説明は2項式で行うが、処理操作である計算練習全般は最初に4項式で一般化して、その後に再度2項式説明へ移る通常とは逆順序であり、違和感を覚えるであろう。そこで、各種の計算方法の意味理解と計算処理・操作習熟について 先ずは顧りみる。

小学1年生の足し算から高等数学の微積分まで、実物や実場面と関連させてその計算の意味を理解した後に演習によって計算処理操作に習熟させていく。

つまり 計算力の定着は、意味理解と計算処理操作習熟の2段階が考えられる。

本稿においては、負数の加減の意味理解を2項計算で行った後、計算処理・操作については先に4項式で一般化した後に2項式へと移る。本稿は、負数を加減する事の意味理解と計算処理・操作習熟の2段階を明確に分離した方法である。現行教科書等は、この2段階が交互に繰り返されるため、生徒の理解には戸惑いが、授業者には煩雑さを覚えさせるのである。

1、本稿の背景説明

この単元の導入にトランプゲームを取り入れられている方はお気づきであろう。生徒は「黒札はプラス点、赤札はマイナス点」というルールを示すだけで、何ら計算方法を説明せずともゲームを楽しむ。つまり、負数も含む加減の要点を無意識のうちに会得しているものと推察出来る。

ゲームの段階で、生徒は負数の引き算はしていないであろう。持ち札4枚の合計をしているだけである。数学的に言うと、引き算は行わず代数和だけを求めている。そして、この代数和を求める事には無意識のうちにかなり習熟していると考えられる。負数の加減という新たな事項を説明するには、この習熟事項に接続すべしであろう。よって、この代数和の求め方を基礎に、それに繋げる方法がスムーズな接続である。

そこで、以後提案する説明の基本を提示します。この基本のことを仮に「要点」と呼ぶことにする。

[要点1、負数を足す事 引く事の意味]

計算手順に慣れる事以前に、負数を足す事 引く事の意味理解が重要である。

[要点2、代数和の求め方]

代数和は項の多少にかかわらず、正項の絶対値の合計から負項絶対値の合計を引き算して求める。

現行教科書や参考書も、加減の全てを最終的にはこの方法で求めることを目標としているらしいが、目標への道順が かえって複雑・面倒な手順になっている。

[要点3、代数和形式への変換]

一般の加減の式は $-5 - (-6) + (-9) + 2$

のように、加減が入り混じり () のある項と無い項が混じっている。代数和形式にするために、その前段である () の無い式に変換する手順を練習する。

[要点4、() はずしの結果をまとめる]

要点3の結果として、() はずしの手順を重要事項として **まとめ** をする。

この実践報告文は、

要点が先あって、その要点から正負の加減計算の手順を導き出すものではない。生徒が小学校算数の経験から無意識に行っているトランプゲームでの得点計算の方法の基本を要点としてまとめ、全ての加減計算に応用出来るように説明を組み直したものである。また、トランプゲームを取り入れていない授業にでも応用出来る説明に一般化したものである。

結論として この方法で計算処理すれば、与えられた式が、項の数 足し算引き算 各項の絶対値の大小に関係なく、ただひと通りの同一手順で加減の処理が行える。以下で 具体的に述べます。

2、授業の流れの要点

まずは結論から記す。次の計算は以下のように行える。

$$-5 - (-6) + (-9) + 2$$

↓① () をはずす

$$= -5 + 6 - 9 + 2$$

↓② 正の項を左に 負の項を右に合計する

$$= (6 + 2) - (5 + 9)$$

↓③ 合計どうしを引き算

$$= 8 - 14 = -6$$

3 (スリー) ステップ

この式変形の数学的なていねいな説明は下記のようになる。

$$-5 - (-6) + (-9) + 2$$

↓① () をはずす

$$= -5 + 6 - 9 + 2$$

↓ (ア) 代数和表示に変える

$$= (-5) + (+6) + (-9) + (+2)$$

↓ (イ) 交換法則で並べ替え

$$= (+6) + (+2) + (-5) + (-9)$$

↓ (ウ) 正負の項をそれぞれ合計

$$= (6 + 2) - (5 + 9)$$

↓③ 合計どうしを引き算

$$= 8 - 14 = -6$$

代数和表示の青字の2行と (ア) (イ) (ウ) の3行の式変形指示は、中学生には分かりづらいので、算数での「数の多い足し算引き算の処理方法」に基づいて 計算処理方法指示部分を

↓② 正の項を左に 負の項を右に合計する の1行にまとめたものが 先に示した3ステップである。

3、授業の流れの具体案

(1) 負数の必要性 意味 数の大小 など

これは現行教科書の記述とほぼ同じである。

次の項で扱う $2 - 5 =$ の計算にも答えを用意するために、大人の世界での借金(つけ払い)の話などを授業者の創意にお任せます。 いずれにしても、実生活に即し例示を分かり易く ひとつだけでなく何種類も用意するのが肝要である。

(2) $2 - 5 =$ の練習 (小さい数) - (大きい数)

正負の加減と言えども、小学校で扱っていないのはこのパターンの計算のみである。 この計算と次に述べる () はずしの2つの事柄が正負の加減計算のキーポイントである。 他は単なる計算処理操作の習熟のための機械的な練習である。 数の拡張という意味で、この計算に触れるのは大切であるにもかかわらず、令和3年度教科書から ようやくこの説明が付加された。筆者手持ちの東書版では、この型に特化した練習問題が見当たらない。

(3) 負数の足し算・引き算 (2項計算)

ここは単元の核心であり、負数計算の意味を理解させる。 数直線での説明のみの教科書が殆どであるが、トラップを使ったり現金借金のやり取りなども十分に説明する。

そして 結果を下記のようにまとめる。

$$5 + (+2) = 5 + 2 \quad 5 + (-2) = 5 - 2$$

$$5 - (+2) = 5 - 2 \quad 5 - (-2) = 5 + 2$$

⇓⇓ 符号のみに注目して

$$++ \rightarrow + \quad +- \rightarrow -$$

$$-+ \rightarrow - \quad -- \rightarrow +$$

さらに要約して ⇨⇨ 「同符号はプラス 異符号はマイナス」

この結果を憶えこむ練習問題プリントを用意する。教科書はこの結果を重要視していません。

註、厳密には、() の中の+-は符号で () の左の+-は演算記号である。

正確には同記号・異記号などと言うべきか？ 最後に付加しています「余録」を参照願います。

ここまでは 現行教科書とほぼ同じである。

(練習プリントについては、後述するホームページよりダウンロード出来ます。)

(4) 小学校算数の復習 (項の多い式で工夫)

ここからは 計算の処理・操作の習熟である。

算数の授業で 集中的には扱っていないが、次の方法を生徒は十分理解する。

$$7 - 5 + 3 - 1$$

↓①足し算 引き算どうしまとめる。

$$= (7 + 3) - (5 + 1)$$

↓②合計どうしを引き算

$$= 10 - 6 = 4$$

(練習プリントは後述ホームページからダウンロード出来ます。)

(5) 正負の加減を まず 4項式で一般化する

先に取り上げた式である。前項(4)の処理をする前に () はずしの結果を適用する。

$$-5 - (-6) + (-9) + 2$$

↓① () をはずす

$$= -5 + 6 - 9 + 2$$

↓② 正の項を左に 負の項を右に合計する

$$= (6 + 2) - (5 + 9)$$

↓③ 合計どうしを引き算

$$= 8 - 14 = -6$$

3 (スリー) ステップ

以上の説明は この3ステップ法の正当性を示すために述べているだけで、生徒自身は 小学校算数の経験から深く説明せずとも理解している。

以後は 3ステップを手順通りに実行する練習であるが、与えられた式の型認定をすることなく 全ての加減の式を同一手順で処理出来る。

計算の具体例 (型分け認定は不要である。)

① 足し算のみの式 これは代数和の求め方である。

$$\begin{aligned}
 & (+5) + (-3) + (+4) + (-2) \\
 & \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{① () をはずす} \\
 & = 5 - 3 + 4 - 2 \\
 & \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{②正負それぞれを合計} \\
 & = (5 + 4) - (3 + 2) \\
 & \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{③合計どうしを引き算} \\
 & = 9 - 5 = 4
 \end{aligned}$$

3ステップ

② 引き算も混じった型

$$\begin{aligned}
 & (+5) - (+2) + (-3) - (-4) \\
 & \text{場面の説明は特に必要ないが、もしするならば「最初5万円所持→次に2万円を出費 →3万円借金する →} \\
 & \text{借金4万円を減らす。」などと口頭説明する。}
 \end{aligned}$$

板書は

$$\begin{aligned}
 & (+5) - (+2) + (-3) - (-4) \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{① () をはずす} \\
 & = 5 - 2 - 3 + 4 \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{②正負それぞれを合計} \\
 & = (5 + 4) - (2 + 3) \qquad \text{(正項は左 負項は右)} \qquad \downarrow \text{③合計どうしを引き算} \\
 & = 9 - 5 = 4
 \end{aligned}$$

③ () はずし後 正負2項ずつで 最左の項が負の型

$$\begin{aligned}
 & (-2) - (-6) - (+3) + (+1) \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{① () をはずす} \\
 & = -2 + 6 - 3 + 1 \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{②正負それぞれを合計} \\
 & = (6 + 1) - (2 + 3) \qquad \text{(正は左 負は右)} \qquad \downarrow \text{③合計どうしを引き算} \\
 & = 7 - 5 = 2
 \end{aligned}$$

④ () はずし後 正負の項が3つと1つの型 () のない項も挿入

$$\begin{aligned}
 & (-2) - (+6) + 3 - (+4) \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{① () をはずす} \\
 & = -2 - 6 + 3 - 4 \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{②正負それぞれを合計} \\
 & = (3) - (2 + 6 + 4) \qquad \text{(正は左 負は右)} \qquad \downarrow \text{③合計どうしを引き算} \\
 & = 3 - 12 = -9
 \end{aligned}$$

項が1つのものも、合計として () の中へ 記入。慣れれば、 unnecessary () は 生徒自らが自分たちで省略処理している。

⑤ 4項すべてが負の型

$$\begin{aligned}
 & (-3) - 2 - 4 + (-5) \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{① () をはずす} \\
 & = -3 - 2 - 4 - 5 \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{②正負それぞれを合計} \\
 & = (0) - (3 + 2 + 4 + 5) \text{ (正は左 負は右)} \qquad \downarrow \text{③合計どうしを引き算} \\
 & = 0 - 14 = -14
 \end{aligned}$$

正項の合計は0と表記するが、3ステップは同じ。

- ・既にお分かりのように**3ステップ法**で行えば、()の有無 演算の加減 項の正負 全体の項数などの 型の特徴に全く関係なく、全て同じ手順で解答が得られる。

⑥ 2項式の場合

$$\begin{aligned}
 \triangleright \quad & -5 - (-3) && \downarrow \text{① () をはずす} \\
 & = -5 + 3 && \downarrow \text{② 正負それぞれを合計} \\
 & = (3) - (5) \quad (\text{正は左 負は右}) && \downarrow \text{③ 合計どうしを引き算} \\
 & = 3 - 5 = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \triangleright \quad & -12 + (-5) && \downarrow \text{① () をはずす} \\
 & = -12 - 5 && \downarrow \text{② 正負それぞれを合計} \\
 & = (0) - (12 + 5) \quad (\text{正は左 負は右}) && \downarrow \text{③ 合計どうしを引き算} \\
 & = 0 - 17 = -17
 \end{aligned}$$

手順が単純なので説明時間が節約出来、その分独自教材の問題と教科書の問題の両方を同じ時間数で消化できる。負数の導入以後の「正負の数の加減」は東書指導案では授業時数は8時間。3ステップ法では、これを4時間で十分完了です。整数のみの計算ならば、3時間で十分完了です。

いろいろな問題を提示するが 各項を合計する手順の要点を記しておく。

- ・正負片方の項がひとつの場合。 () の中にそのひとつの数のみ書く。
- ・項全てが負の項の場合。 正の合計は 0 (ゼロ) と書く。

4、反復練習のための 2項計算でのまとめ (教科書の型分けに相当するものです。)

以上の計算練習で負数を含む全ての計算が出来るが、基本になる2項計算は3ステップなどの手順を踏むことなく、パツパツと暗算で答を出す練習が必要である。 そのために 改めて2項計算の **まとめ** をする。3ステップ法では、加減を説明するのに絶対値という単語は不必要であるが、暗算練習の **まとめ** をするのに便利なので ここで絶対値の説明を簡単に加えておく。教科書では最初に示している型分けの表であるが、既にどんな加減も出来るようになっているのでこの表を憶えることを強調する必要はないであろう。

2つの数の 加法 と 減法の結果まとめ (a+b a-b など)			
		操 作	答の符号
加法	2つの数 a と b が 同符号の場合	絶対値どうしを足す	2つの共通の 符号をつける
	2つの数が 異符号の場合	絶対値の大きい方から 小さい方を引き算する	絶対値の大きい方の 符号をつける。
減法	右側の数 b の符号を変えて加法にする		

上記のまとめは ある意味定理である。定理であって公理ではないので、教科書のように加減計算の全ての最初をこれから出発する必要はないと筆者は考えています。

加減の暗算練習を、その後の2～3回の授業の始めに5分か10分かけて毎回行う。

2数の例は、教科書になれば、ホームページの生徒練習用プリントの最後に添付しています。

5、誤答例

どなたもご存知のように、トランプでの説明や数直線での説明に関係なく 次のような誤答がよくある。

① $-5 - 3 = 8$ ② $-5 - 3 = -2$

①は、()はずしやかけ算の「マイナス・マイナスはプラス」の結果の印象の強さから、

②は計算手順の勘違い $-(5 - 3) = -2$ から来る誤答と考えられる。これらの誤答は、いろいろな場面で何回か指摘して正しておく。

6、現行教科書と3ステップ法の比較

最初の要約に書いたように現行教科書の展開方法は生徒に戸惑いを与え、我々授業者にとっては煩雑な説明を強いられる。現行教科書は、計算の意味説明と計算処理操作説明が混在している。それだけでなく、教科書流説明では、与えられた式の型分類を認定しなければならない。型の認定は初心者にとって、それ自体戸惑いの原因になる。

3ステップ法では、式のいろいろな型 足し算引き算 式の項の数 項の正負 各項の絶対値の大小 () の有無など 全て関係なくただ **ひと通りの同一手順** で全て行える。

3ステップ法では授業時間の短縮だけでなく、生徒の理解定着にすぐれている。普通授業では会得出来なかった知的支援学級生が、3ステップ法の3時間の授業で教科書程度の加減混合問題に正解を出すようになった実績があることを付記しておきます。

また、教科書執筆を担当されている ある大学教授の先生、ご自分の子供さんが中学1年生で、負数の加減計算でつまづいているのを見て、この3ステップ法で説明したところ 納得よく進んだとの報告も受けました。

6、参考文献

この3ステップ法は 特別な方法ではなく、全ての教科書や参考書で単元の終わりに、ほぼ必ず説明されている。しかし、筆者の不勉強であろうが、このような展開順での説明は、文献でもネット上でも見たことがありません。強いて言えば、トランプゲームの中で、生徒から聞き出した彼らの計算方法を体系化した方法であり、さらに、それをトランプゲームとは関係なしでも授業展開出来るように昇華したものが本稿の3ステップ法であります。

筆者ホームページ

検索用語「 正負の数の加減 奈良 」

URL <https://narajhm.jimdo.com>

- ・授業で使える練習プリントもダウンロード出来ます。
- ・教科書流と3ステップの相違点を表にまとめたものも掲載しています。
- ・入学後の最初の授業から加減の終了までの簡単な授業案も掲載しています。

筆者住所 〒 630-8302 奈良市白毫寺町778

fukuo-2981@kcn.jp

福尾忠彦



筆者ホームページ

余 録 (符号と演算記号について)

この項は授業で取り上げる内容ではなく、授業者の知識として考える材料にしてもらえれば幸いです。

例えば $-5 - (+6) + (-9) + 2$

これらの式の中に出てくる $+$ や $-$ の記号の名称や働きは同じものに対して別の名称や働きが与えられていると考えられます。

つまり、同じ $+$ であっても () の中の $+$ は**符号**、() の外の $+$ は加法を示す**演算記号**と呼ばれている。私は 現役時代には、違う働きのものには 違う別の記号、例えば、演算記号としての $+$ 、 $-$ はそのまま、符号の方には \oplus \ominus などと別の記号を用意すべしと考えていました。アメリカなどの教科書では符号には別記号を用意されているようですが、少なくとも日本では、数学のテキストでそのような区別をしているものはありません。

ある時期になり、数学の記述方法は 長年の経験で よく出来ているものだなあと 思いあたりました。符号と演算記号、別のものと言え別のものですが、考えようによっては同じものと解釈出来なくはないと思えます。

例えば、 -3 のマイナスは普通 符号と呼んでいます。しかし、次のようにも考えられます。

$$-3 = 0 - 3$$

↑符号 ↑演算記号

$-3 = 0 - 3$ 加減では 0 (ゼロ) は省略出来ます。すると

$$-3 = -3$$

↑符号 ↑演算記号 ということになります。

つまり、符号と演算記号は同じものになります。 全く同じものかどうか筆者にはこれ以上分かりませんが、少なくとも、この2つを厳密に区別する必要はないと考えられます。

つまり、符号と演算記号は同じ機能のものが違う名称で呼ばれていることになります。

ですから、符号と演算記号を厳密に区別する必要はないのではないかとというのが今の私の考えです。

確かに 負数や その加減を説明する場合、区別した方が便利なこともありますから、この事について 教科書の記述を変更すべしとまでは思っていません。

以下 余白